



O'zbekiston Respublikasi Ta'limni rivojlantirish
Respublika ilmiy-metodik markazi

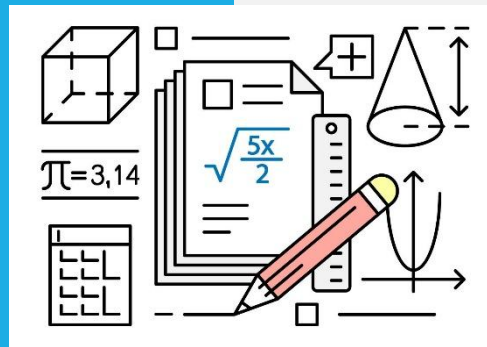
Ekstremal masalalarni yechishda matematika fanining o'рни

Zafar Otamurodovich Jumayev
Xatirchi tuman ixtisoslashtirilgan maktabning
matematika fani o'qituvchisi

Biror miqdorning eng katta va eng kichik qiymatini topish va bunday qiymatlar qanday shartlar bajarilganda mavjud bo'lishini aniqlash talab qilingan masalalarni “ekstremumga oid” (ekstremal masalalar) masalalar deb ataladi.



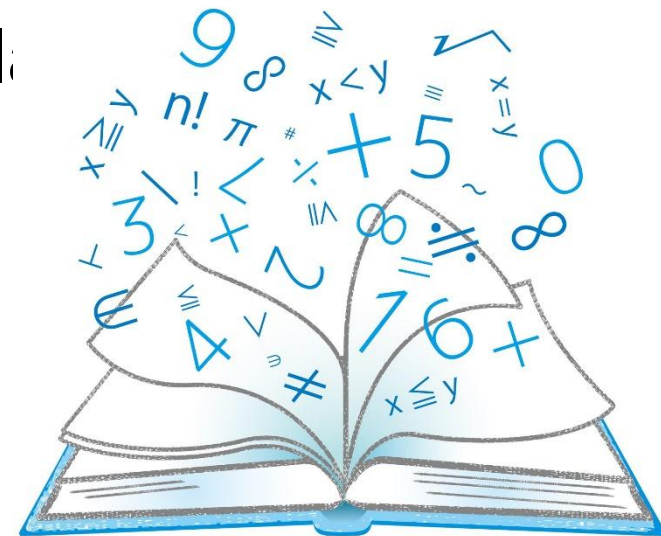
Ekstremal masalalar



(lotincha “extremum” – “chekka”)
Bunday masalalarni “maksimum” va
“minimum” (lotincha “maximum” va
“minimum” – mos hollarda “eng katta” va
“eng kichik”) ga oid masalalar deb ham
ataladi. Bunday masalalar texnika va
tabiatshunoslikda, insonlarning kundalik
faoliyatida tez-tez uchraydi.

EKSTREMAL MASALALARNI ELEMENTAR USULLAR BILAN YECHISH

- Tengsizliklar yordamida yechiladigan ekstremal masalalar
- Kvadrat uchhad yordamida yechiladigan ekstremal masalalar
- Ko'paytmaning maksimumi va yig'indining minimum haqidagi teoremlar yordamida yechiladigan ekstremal masalalar



Koshi tengsizligi

Teorema: n ta ($n \in \mathbb{N}$) manfiy bo'lmagan sonlarning o'rta arifmetigi shu sonlarning o'rta geometrigidan kichik emas:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Bu yerda tenglik belgisi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ shartda bajariladi.



A. Cauchy.

B^{on} Augustin Cauchy

Isbot. To'la induksiya usulidan foydalanamiz.

$n = 2$ bo'lganda yuqoridagi fikrni to'g'riligini ko'rsatamiz, ya'ni

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2} \quad (1)$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2}, \quad x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 \cdot x_2},$$

$$x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 \cdot x_2} \geq 0,$$

$$\sqrt{x_1}^2 - 2\sqrt{x_1 \cdot x_2} + \sqrt{x_2}^2 \geq 0, \quad (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0.$$

Demak, (1) tengsizlik $n = 2$ da to'g'ri ekan. Bu yerda ham tenglik $x_1 = x_2$ shartda bajariladi.

KVADRAT UCHHAD YORDAMIDA YECHILADIGAN EKSTREMAL MASALALAR

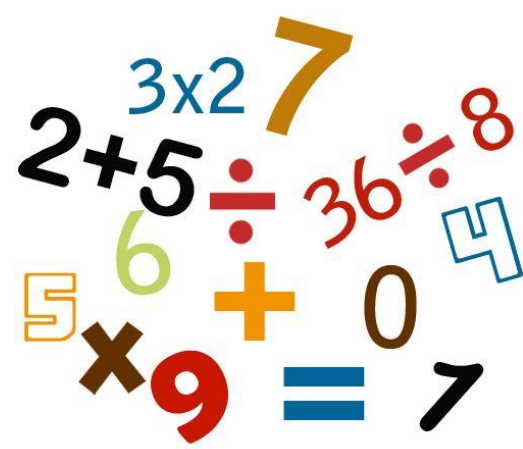
Ekstremumga oid masalalarni yechishda foydalanish mumkin bo'lgan elementar usullardan yana biri kvadrat uchhadning xossalaridan foydalanishdan iborat.



Teorema: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) kvadrat uchxad $a < 0$ bo'lganda o'zining eng katta qiymatiga $x = -\frac{b}{2a}$ bo'lganda erishadi.

Isbot:

$$\begin{aligned} y = ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right] = \\ a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$



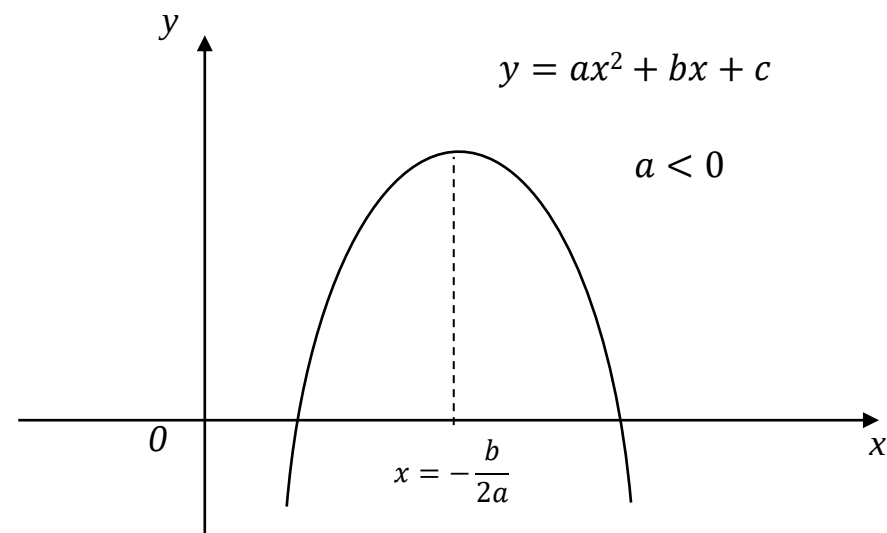
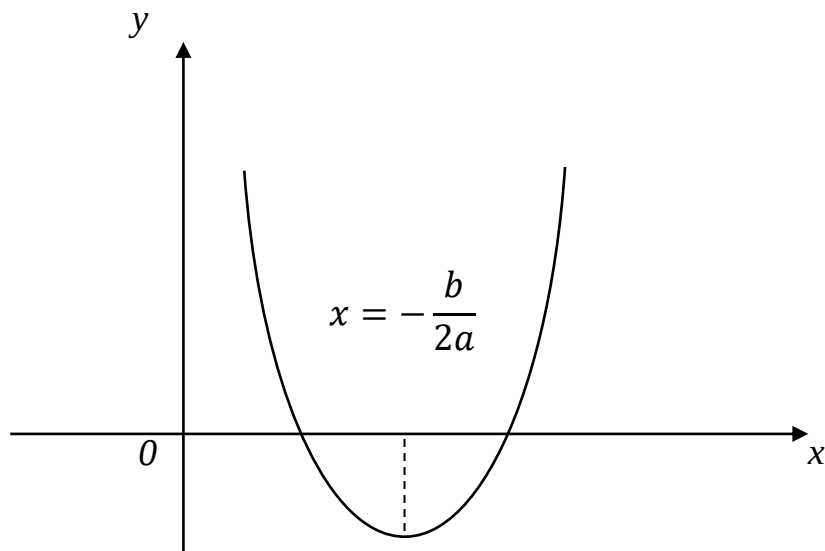
$a < 0$ bo'lgani uchun birinchi qo'shiluvchi $a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$

musbat bo'lmaydi. Shuning uchun $x + \frac{b}{2a} = 0$, ya'ni $x =$

$-\frac{b}{2a}$ da kvadrat uchhad $c - \frac{b^2}{4a}$ ga teng eng katta

qiymatga erishadi.

Teorema: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) kvadrat uchhad $a > 0$ bo'lganda o'zining eng kichik qiymatiga $x = -\frac{b}{2a}$ bo'lganda erishadi.



Isbot: $y = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 +$

$$c - \frac{b^2}{4a}$$

$a > 0$ bo'lganda birinchi qo'shiluvchi musbat.

Shuning uchun $x + \frac{b}{2a} = 0$, ya'ni $x = -\frac{b}{2a}$

da kvadrat uchhad $c - \frac{b^2}{4a}$ ga teng eng kichik qiymatga erishadi.



Ekstremal masalalarni yechishda qo'llash mumkin bo'lgan usullardan yana biri ko'paytmaning maksimumi va yig'indining minimumi haqidagi teoremlardan foydalanishdir.

Teorema: Yig'indisi o'zgarmas bo'lgan n ta musbat ko'paytuvchilarning ko'paytmasi shu ko'paytuvchilar o'zaro teng bo'lganda eng katta qiymatga erishadi.

Isbot: Aytaylik n ta musbat $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ sonlarning yig'indisi o'zgarmas bo'lsin. Uni S bilan belgilaymiz. U holda

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{S}{n} \text{ yoki } x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \leq \left(\frac{S}{n}\right)^n.$$

Bu yerdagi tenglik belgisi qo'shiluvchilar o'zaro teng bo'lganda, ya'ni har biri $\frac{S}{n}$ ga teng bo'lganda bajariladi. Qolgan barcha hollarda $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ ko'paytma $\left(\frac{S}{n}\right)^n$ o'zgarmas sonidan kichik bo'ladi. Demak, $\left(\frac{S}{n}\right)^n$ son $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ ko'paytmaning eng katta qiymati bo'ladi.

Teorema: Ko'paytmasi o'zgarmas bo'lgan n ta musbat qo'shiluvchilarning yig'indisi o'zining eng kichik qiymatiga ko'paytuvchilar o'zaro teng bo'lganda erishadi.

Isbot: Aytaylik n ta manfiymas $x_1, x_2, \dots, x_n$ ko'paytuvchilarning ko'paytmasi o'zgarmas P ga teng bo'lsin. U holda

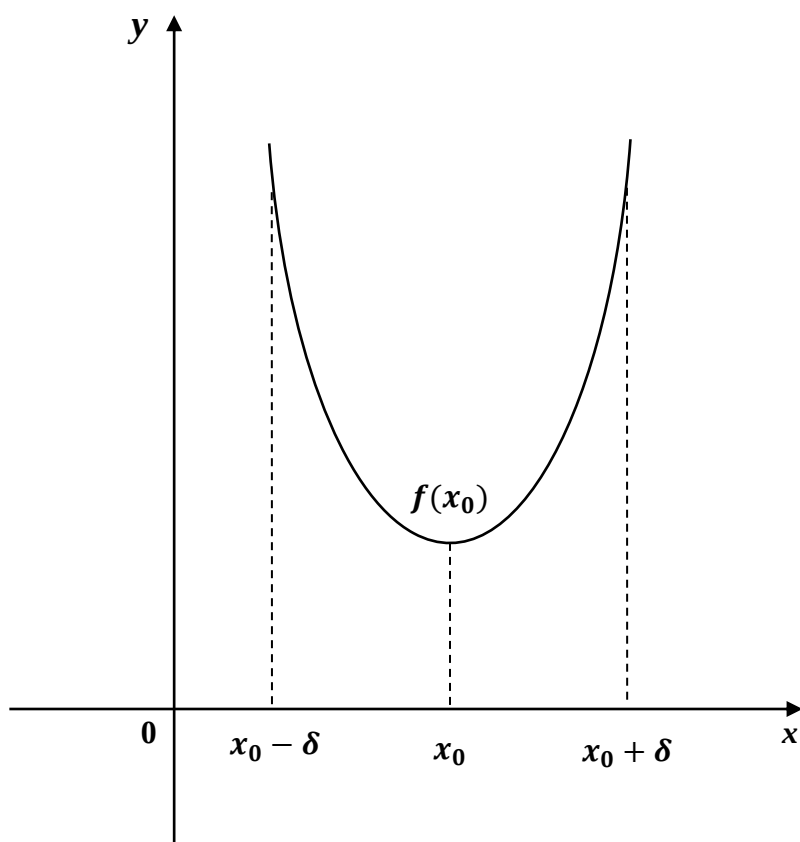
$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{P};$$
$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n\sqrt[n]{P}$$

bu yerdagi tenglik belgisi har bir ko'paytuvchi o'zaro teng ya'ni $\sqrt[n]{P}$ bo'lganda bajariladi, qolgan hollarda esa $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ yig'indi $\sqrt[n]{P}$ dan katta bo'ladi.

Shunday qilib $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ yig'indining eng kichik qiymati $n\sqrt[n]{P}$ ga teng va u har bir qo'shiluvchi $\sqrt[n]{P}$ ga teng bo'lganda ro'y beradi.

Funksiyaning ekstremumlari

Endi biz miqdorlarning eng kichik va eng katta qiymatlarini izlashda matematik analizning fundamental tushunchalaridan hisoblangan hosila tushunchasidan foydalanish mumkinligini bayon qilamiz. Bunda biz dastlab funksiyaning maksimumi va minimumi haqidagi ta'riflarni keltiramiz.



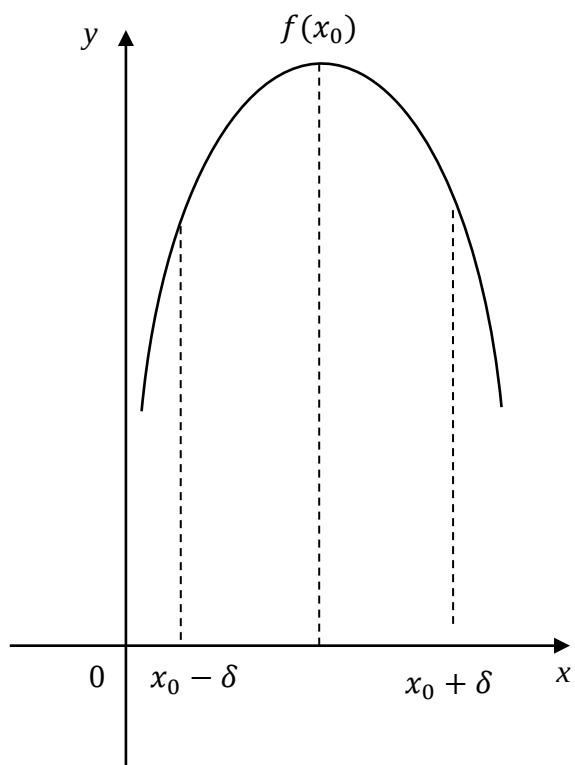
Ta'rif: Agar $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan $x = x_0$ nuqtaning shunday $x_0 - \delta$; $x_0 + \delta$ ($\delta > 0$) atrofini topish mumkin bo'lsaki bu atrofdagi barcha $x \neq x_0$ lar uchun

$$f(x) > f(x_0)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada minimumga ega deyiladi.

Bunda x_0 nuqtani funksiyaning minimum nuqtasi, $f(x_0)$ qiymat esa $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi minimum qiymati deyiladi

Funksiyaning ekstremumlari



Ta'rif: Agar $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan $x = x_0$ nuqtaning shunday $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ ($\delta > 0$) atrofini topish mumkin bo'lsaki, bu atrofdagi barcha $x \neq x_0$ lar uchun

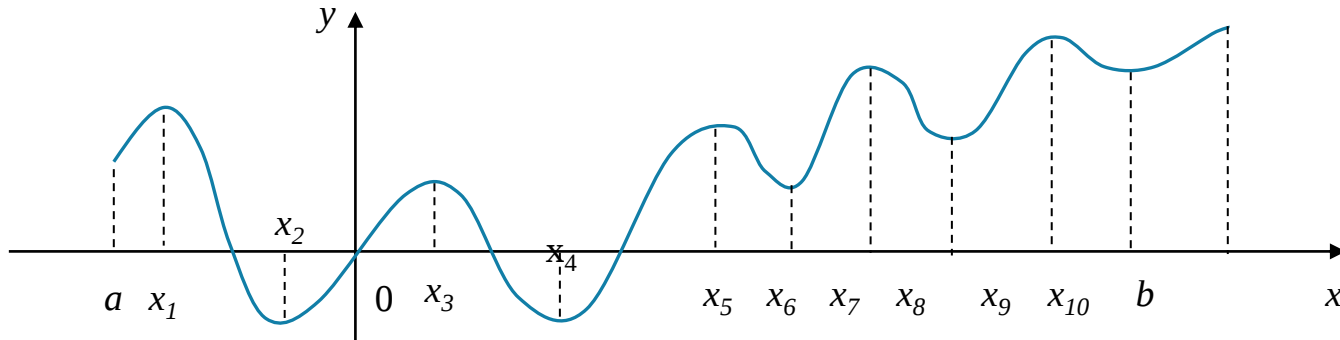
$$f(x) < f(x_0)$$

Tengsizlik bajarilsa, u holda $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ maksimumga ega deyiladi.

$x = x_0$ nuqta $y = f(x)$ funksiyaning maksimum nuqtasi, $f(x_0)$ qiymat esa $f(x)$ funksiyaning $x = x_0$ nuqtadagi maksimum qiymati deyiladi

FUNKSIYANING EKSTREMUMLARI

Bunda shuni ta'kidlaymizki, maksimum (minimum) ta'rifida funksiya x_0 nuqtaning ikkala tomonida aniqlangan bo'lishi talab qilinadi. "Maksimum" va "Minimum" lotinch so'zlar bo'lib, eng katta va eng kichik degan ma'noni bildiradi. Shuni ta'kidlaymizki, biz yuritayotgan muhokamada maksimum va minimum terminlari orqali x_0 nuqtaning yetarlicha kichik atrofida $f(x)$ funksiyaning o'zgarishi xarakterlanadi. Berilgan bitta $f(x)$ funksiyaning o'zi bir necha maksimum va bir necha minimumlarga ega bo'lishi, ham mumkin. Bu esa maksimum va minimum terminlarini funksiyaning aniqlanish sohasida uning eng katta va eng kichik qiymatlari tushunchasi bilan bir xil deb qarash mumkin emas. Masalan, quyida berilgan chizmadagi funksiya uchun x_1, x_3, x_5, x_7, x_9 nuqtalarda funksiya maksimumiga $x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}$ nuqtalarda esa funksiyaning minimumiga ega, shu bilan birga funksiyaning x_{10} nuqtadagi minimumi x_1, x_3, x_5 nuqtalardagi maksimumidan kattadir.



Funksiyaning maksimumi va minimumi nuqtalari shu funksiyaning ekstremum nuqtalari deyiladi. Funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlari uning ekstremumlari deyiladi.

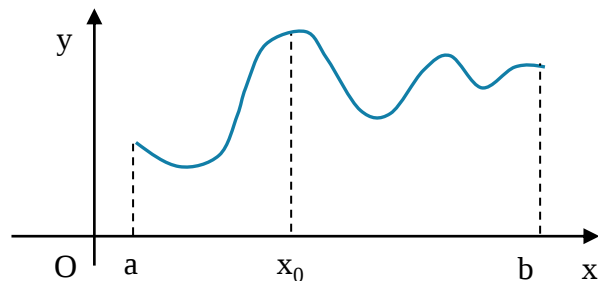
FERMA TEOREMASI

Agar $x = x_0$ nuqta $y = f(x)$ funksiya uchun ekstremum nuqta bo'lsa, bu nuqtada hosila mavjud bo'lsa, bu hosila $x = x_0$ nuqtada nolga teng bo'ladi, ya'ni $f'(x_0) = 0$ bo'ladi.

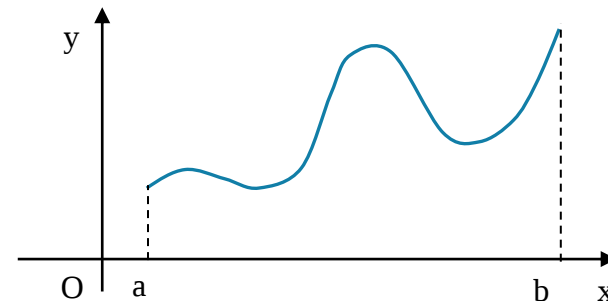
Ekstremal masalalar yechish

Aytaylik $[a, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz $y = f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Hozirgacha biz bu funksiyaning faqat lokal maksimumi va lokal minimumlarini izlash bilan shug'ullandik. Endi biz $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini izlash bilan shug'ullanamiz. Shuni ta'kidlaymizki, Veyershtrass teoremasiga asosan $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmaning biror nuqtasida o'zining eng katta yoki eng kichik qiymatiga albatta erishadi. Aniqlik uchun $[a, b]$ kesmada $f(x)$ funksiyaning eng katta qiymatini izlash masalasi bilan shug'ullanaylik.

$f(x)$ funksiya o'zining eng katta qiymatiga $[a, b]$ kesamning yo ichki x_0 nuqtasida (bu vaqtda u $f(x)$ funksiyaning biror lokal maksimumi bilan ustma-ust tushadi (1-chizma) yoki $[a, b]$ kesmaning chetki (boshi yoki oxiri) nuqtalaridan birida erishishi mumkin (2-chizma).



1-chizma



2-chizma

$[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun quyidagi qoida kelib chiqadi:

- 1.** $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesma ichida yotuvchi barcha kritik nuqtalari topiladi.
- 2.** Bu nuqtalarda funksiylarning qiymatlari topiladi.
- 3.** $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesma chetlaridagi qiymatlari topiladi.
- 4.** Funksiyaning topilgan barcha qiymatlari orasidagi eng katta qiymati funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi eng katta qiymati bo'lib, ular ichida eng kichigi esa funksiyaning $[a, b]$ kesmdagi eng kichik qiymati bo'ladi

**E'TIBORINGIZ UCHUN
RAHMAT**