

2.4

РАЦИОНАЛЬНЫЕ, ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

КЛЮЧЕВЫЕ
ТЕРМИНЫ

- рациональные числа
- конечные десятичные дроби
- периодические дроби
- иррациональные числа
- действительные числа



ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Слово «рациональное» исходит от слова «ratio», то есть «отношение». Мы знаем, что отношение чисел можно записать в виде обыкновенной дроби. Например, число девочек от числа мальчиков можно записать в виде $\frac{3}{5}$.

Более подробно отношения мы изучим в следующих разделах.

ОБРАТИТЕ
ВНИМАНИЕ!

Конечную десятичную дробь можно записать в виде обыкновенной дроби.

ОБРАТИТЕ
ВНИМАНИЕ!

При использовании калькулятора ответ выражения $1 \div 9$ выражается десятичной дробью: 0,11111111... Так как экран калькулятора не может показать все цифры, мы должны знать группу повторяющихся цифр дроби. При делении 1 на 9 всё время повторяется остаток 1.

$$\begin{array}{r} 10 \overline{) 9} \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \dots \end{array}$$

А Рациональные числа

Следующие числа можем записать в виде $\frac{a}{b}$, где a и b – целые числа и $b \neq 0$.

Ноль: 0

Положительные целые числа: 1; 2; 3; ...

Отрицательные целые числа: -1; -2; -3; ...

Обыкновенные дроби и смешанные числа: $\frac{1}{2}$; $\frac{4}{3}$; $5\frac{2}{7}$; ...

Конечные десятичные дроби: 0,4; 7,75; ...

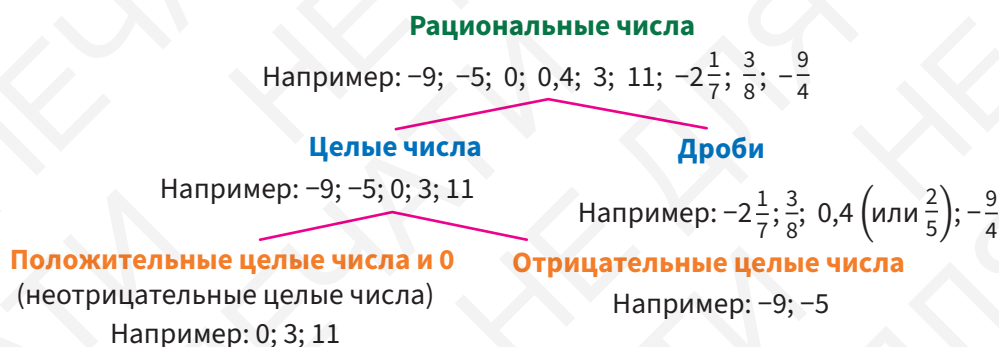
Например,

$$0 = \frac{0}{7}, \quad 2 = \frac{2}{1}, \quad -3 = \frac{-3}{1}, \quad 5\frac{2}{7} = \frac{37}{7}, \quad 0,4 = \frac{2}{5} \quad \text{и} \quad 7,75 = 7\frac{3}{4} = \frac{31}{4}.$$

Это **рациональные числа**.

Числа, которые можно записать в виде $\frac{a}{b}$, называются рациональными числами, где a и b – целые числа и $b \neq 0$.

Рассмотрим связь между разными видами чисел.



Любое рациональное число вида $\frac{a}{b}$ можно записать в виде десятичной дроби путём деления числителя дроби на его знаменатель. Рассмотрим примеры того, как можно представить рациональное число в виде десятичной дроби.

12 ПРИМЕР

Запишите рациональные числа в виде десятичных дробей.

a) $\frac{3}{8}$

b) $\frac{1}{9}$

c) $\frac{53}{99}$

d) $\frac{47}{999}$

РЕШЕНИЕ

a) $\frac{3}{8} = 3 \div 8 = 0,375$

b) $\frac{1}{9} = 0,11111111\dots = 0,(1)$

c) $\frac{53}{99} = 0,53535353\dots = 0,(53)$

d) $\frac{47}{999} = 0,047047047\dots = 0,(047)$

а) Дробь 0,375 – **конечная десятичная дробь**, так как она содержит конечное число цифр. А десятичные дроби в пунктах **б)**, **с)** и **д)** не конечные, так как содержат бесконечно много цифр, которые повторяются периодически. Такие десятичные дроби называются **периодическими десятичными дробями**.

б) $\frac{1}{9} = 0,11111111\ldots$. Здесь повторяется только цифра 1 и записывается в скобках:

$$\frac{1}{9} = 0,(1).$$

с) $\frac{53}{99} = 0,53535353\ldots$ и д) $\frac{47}{999} = 0,047047047\ldots$. В каждом из этих чисел есть повторяющиеся группы цифр. Запишем их в скобках:

$$\frac{53}{99} = 0,(53) \text{ и } \frac{47}{999} = 0,(047).$$

Мы увидели, что при записи вышеуказанных **рациональных чисел** в виде десятичных дробей они могут быть либо конечными, либо периодическими десятичными дробями.



ОБСУДИТЕ

Число 0,31818 –
периодическая
десятичная дробь?
Почему?

12

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Запишите обыкновенные дроби в виде десятичных дробей и определите, конечными или периодическими десятичными дробями они являются.

а) $\frac{9}{16}$

б) $\frac{1}{6}$

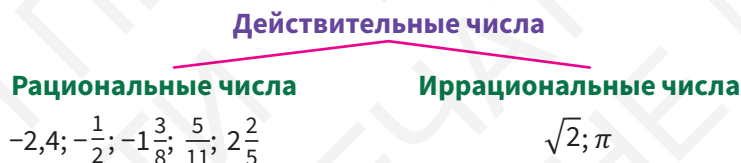
с) $\frac{9}{11}$

д) $\frac{7}{22}$

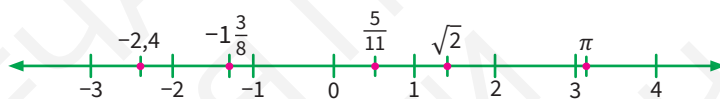
В

Иррациональные и действительные числа

Но есть числа, которые нельзя записать в виде $\frac{a}{b}$, где a и b – целые числа и $b \neq 0$. Их нельзя представить в виде конечной или периодической десятичной дроби. Эти числа называются **иррациональными числами**. Например, π или $\sqrt{2}$. С помощью компьютера вычислены тысячи цифр после запятой числа π , и очевидно, что они не имеют периода. Таким же образом, в десятичной записи числа $\sqrt{2}$ нет периодических повторений, и $\sqrt{2}$ также является иррациональным числом. Рациональные и иррациональные числа вместе составляют **действительные числа**. Это можно изобразить следующим образом:



Любое действительное число можно представить точкой на числовой оси.



ПОДУМАЙТЕ

Можете ли вы составить иррациональное число в виде десятичной дроби, используя: **а)** только 1; **б)** только 0 и 1?

Если ваш ответ положительный, запишите это число. Если отрицательный, приведите контрпример.

13 ПРИМЕР

- а) Определите, рациональными или иррациональными являются следующие числа.
 1) $-\sqrt[3]{1331}$ 2) $-5,2(34)$ 3) $-\pi$
 б) Запишите эти числа в порядке убывания.

РЕШЕНИЕ

- а) 1) $-\sqrt[3]{1331} = -\sqrt[3]{11^3} = -11$
 $-\sqrt[3]{1331}$ – отрицательное целое число. Значит, это число рациональное.
 2) $-5,2(34) = -5,2343434\dots$
 $-5,2(34)$ – десятичная дробь с повторяющимся периодом «34». Значит, это рациональное число.
 3) $-\pi = -3,1415926\dots$
 Число π – бесконечное, и так как у его дробной части нет повторяющегося периода, то оно иррациональное.
 б) Данные числа можно обозначить на числовой оси следующим образом.
-
- Запись чисел в порядке убывания: $-\pi$, $-5,2(34)$ и $-\sqrt[3]{1331}$.



ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Число π обычно записывают как $\frac{22}{7}$ или 3,142. Это приближённые значения π .

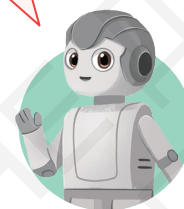
ЧЕРТЕЖИ

Использование чертежей помогает визуализировать математические объекты. Зная значение чертежа, мы можем использовать его для объединения и анализа мыслей (идей). Числовая ось – это множество точек, где каждая точка означает действительное число.



13 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

- а) Определите, рациональными или иррациональными являются следующие числа.
 1) $-\frac{8}{3}$ 2) $\sqrt[3]{-3375}$ 3) $\pi + 1$ 4) $\frac{0,(034)}{2}$
 б) Запишите эти числа в порядке возрастания.



2.4 ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

НАЧАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

- 1 Запишите обыкновенные дроби в виде десятичных дробей. Определите, рациональными или иррациональными они являются.
 а) $\frac{3}{4}$ б) $-1\frac{2}{5}$ в) $\frac{2}{9}$
 д) $-\frac{13}{11}$ е) $-\frac{7}{12}$ ф) $-\frac{17}{20}$
- 2 Запишите десятичные дроби в виде обыкновенных несократимых дробей или в виде смешанных чисел.
 а) 0,32 б) 0,666
 в) 3,45 д) -8,25
- 3 $-\frac{2}{3}$; 0,66666...; 9,(32); $\pi - 3$; 3,1415926; $\sqrt[3]{-216}$
 Разделите данные числа по группам:
 а) рациональные числа;
 б) иррациональные числа.

СРЕДНИЙ УРОВЕНЬ

- 4 Запишите числа в порядке возрастания.

$$\frac{23}{70}, 0,(302), 0,3(02), 0,30(2), \frac{1}{3}$$

- 5 а) Запишите числа в порядке возрастания.

$$\frac{1}{14}, \frac{1}{5}, \frac{1}{11}, \frac{1}{8}$$

- б) Запишите числа в порядке убывания.

$$\frac{13}{14}, \frac{4}{5}, \frac{10}{11}, \frac{7}{8}$$

ВЫСОКИЙ УРОВЕНЬ

- 6 Найдите наибольшее число повторяющихся цифр в десятичных дробях, полученных при делении целого числа на:

- а) 3 б) 7

Обоснуйте свой ответ.

- 7 Определите истинность или ложность следующих высказываний. Если высказывание ложно, приведите контрпример.

- а) Сумма двух иррациональных чисел всегда будет иррациональным числом.
б) Сумма рационального и иррационального чисел всегда будет иррациональным числом.
в) Произведение двух иррациональных чисел всегда будет иррациональным числом.
г) Произведение рационального числа, отличного от 0, и иррационального числа всегда будет иррациональным числом.

- 8 Найдите такое число a , где $-\frac{1}{2} < a < -\frac{1}{3}$ и:

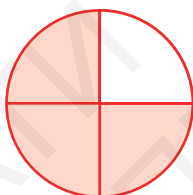
- а) a – конечная десятичная дробь;
б) a – периодическая десятичная дробь;
в) a – иррациональное число.

2.5

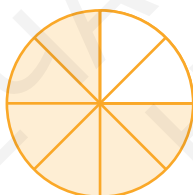
ВЫПОЛНЕНИЕ ДЕЙСТВИЙ НАД ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

А Обыкновенные дроби

Ранее вы изучали равносильные дроби: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{12}{16}$.



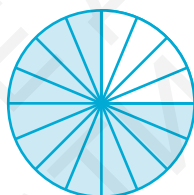
$$\frac{3}{4}$$



$$\frac{6}{8}$$

$$\frac{6}{8} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{3}{4}$$

Общий множитель



$$\frac{12}{16}$$

$$\frac{12}{16} = \frac{3 \times 4}{4 \times 4} = \frac{3}{4}$$

Общий множитель

В числителе и знаменателе дроби $\frac{3}{4}$ нет общего множителя, кроме 1. Эта дробь дана в **несократимом виде**.

Также вы изучали действия над **правильными, неправильными дробями** и **смешанными числами**. В этой главе мы будем выполнять четыре действия над рациональными числами вида $\frac{a}{b}$, где a и b – рациональные числа и $b \neq 0$.

Сложение и вычитание обыкновенных дробей

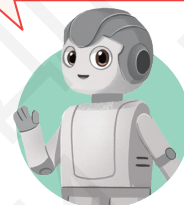
Правила сложения и вычитания целых чисел также распространяются и на обыкновенные дроби.

КЛЮЧЕВЫЕ ТЕРМИНЫ

- несократимый вид
- правильная дробь
- неправильная дробь
- смешанное число

ЧЕРТЕЖИ

С помощью чертежа мы можем наглядно увидеть взаимосвязь между закрашенной площадью и целой частью. Отношения закрашенных частей равны. Значит, дроби $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$ и $\frac{12}{16}$ будут равносильными.



ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Если НОД числителя и знаменателя дроби равен 1, то эта дробь будет несократимой.