

1.3 НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ (НОК)

Запишем первые 10 кратных для чисел 4 и 6.

Числа, кратные 4: 4, 8, **12**, 16, 20, **24**, 28, 32, **36**, 40

Числа, кратные 6: 6, **12**, 18, **24**, 30, **36**, 42, 48, 54, 60

Мы можем увидеть, что числа 12, 24 и 36 являются **общими кратными** чисел 4 и 6. Наименьшее из этих кратных – число 12.

Значит, **наименьшее общее кратное чисел (НОК)** 4 и 6 – число 12.

Наименьшее общее кратное (НОК) двух или нескольких натуральных чисел является наименьшим из общих кратных этих чисел.

Теперь найдём наименьшее общее кратное чисел 24 и 90. Для этого запишем кратные этих чисел.

Числа, кратные 24: 24, 48, 72, 96, 120, 144, 168, 192, 216, 240, 264, 288, 312, 336, **360**, ...

Числа, кратные 90: 90, 180, 270, **360**, ...

Но это очень скучная работа. Вместо этого используем удобный и простой способ вычисления НОК этих двух чисел, как показано в **примере 8**.

8 ПРИМЕР

Найдите наименьшее общее кратное чисел 24 и 90.

РЕШЕНИЕ

Способ 1. Разложение на простые множители

Каждое число запишем в виде произведения простых множителей.

$$24 = 2^3 \times 3$$

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5$$

Процесс нахождения всех множителей для определения НОК можно представить наглядно следующим образом:

24	=	2	×	2	×	2	×	3				
90	=	2					×	3	×	3	×	5
НОК	=	2	×	2	×	2	×	3	×	3	×	5

$$\therefore \text{НОК} = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$$

2^3 имеет большую степень, чем 2. 3^2 имеет большую степень, чем 3.



Для вычисления НОК нескольких чисел надо умножить наибольшие степени каждого простого делителя.



КЛЮЧЕВЫЕ ТЕРМИНЫ

- общие кратные
- наименьшее общее кратное (НОК)



ОБСУДИТЕ

Почему для двух или нескольких чисел находится не наибольшее общее кратное, а наименьшее?



ВСПОМНИТЕ

Для сложения и вычитания обыкновенных дробей мы приводили их к общему знаменателю. Для нахождения общего знаменателя понятие НОК используется следующим образом:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$$

НОК чисел 4 и 6 равно 12.

Способ 2. Способ краткого деления

Разделим на общие делители.

$$\begin{array}{r} 90 \quad 24 \\ 45 \quad 12 \\ 15 \quad 4 \end{array} \left. \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Каждый делитель – это общий} \\ \text{простой делитель чисел 24 и 90.} \end{array}$$

← Нет общих делителей.

НОК = это произведение простых делителей и остальных делителей
 $= 2 \times 3 \times 4 \times 15$
 $= 360$

РАВНОСИЛЬНОСТЬ

$24 = 2^3 \times 3$
 $90 = 2 \times 3^2 \times 5$
Разложив числа 24 и 90 на множители, мы можем легко найти НОК этих чисел.



8

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

- Вычислите НОК чисел 40 и 150, используя разложение на простые множители.
- Вычислите НОК чисел 63 и 147, используя способ краткого деления.

9

ПРИМЕР

Найдите НОК чисел 20, 24 и 70.

РЕШЕНИЕ

Способ 1. Разложение на простые множители

$$\begin{array}{r} 20 = 2^2 \times 5 \\ 24 = 2^3 \times 3 \\ 70 = 2 \times 5 \times 7 \\ \hline \text{НОК} = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 \\ = 840 \end{array}$$

Записав делители данных чисел так, как показано в примере, мы легко можем выбрать наибольшую степень каждого простого делителя.

Способ 2. Способ краткого деления

Выполним деление, используя общие простые делители не менее чем для двух чисел из данных трёх. Если одно из чисел не делится на делитель, то перенесём его на следующую строку.

$$\begin{array}{r} 20 \quad 24 \quad 70 \\ 10 \quad 12 \quad 35 \\ 5 \quad 6 \quad 35 \\ 1 \quad 6 \quad 7 \end{array} \left. \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Общие простые} \\ \text{делители} \\ \text{(должно быть} \\ \text{не менее трёх} \\ \text{чисел)} \end{array}$$

← Число 35 не делится на 2. Поэтому перенесём его на следующую строку.
← 6 не делится на 5. Поэтому перенесём его на следующую строку.
← Продолжим этот процесс до тех пор, пока общих делителей не останется.

$$\begin{array}{r} \text{НОК} = 2 \times 2 \times 5 \times 6 \times 7 \\ = 840 \end{array}$$



ПОДУМАЙТЕ

Мы вычислили НОК чисел 20, 24 и 70 – это 840.

- Будет ли НОК каких-либо двух из этих трёх чисел равным 840?
- НОК этих двух чисел больше 840? Обоснуйте свой ответ.

9

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

- Найдите НОК чисел 54, 84 и 110.
- Даны числа: $(2 \times 3 \times 7^2)$, $(2^2 \times 11)$ и 3. Найдите НОК чисел, записав ответ в виде степени.

10

ПРИМЕР

Найдите НОК чисел 26 и 99.

РЕШЕНИЕ

$$26 = 2 \times 13$$

$$99 = 3^2 \times 11$$

$$\therefore \text{НОК} = 2 \times 3^2 \times 11 \times 13 \\ = 2574$$



ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

НОК чисел 26 и 99 равно 2574, т. е. 26×99 . Используя разложение на простые множители в **примере 10**, определим, что НОД чисел 26 и 99 равен 1, т. е. эти числа взаимно простые.

Значит, если два числа взаимно простые, то их НОК будет равно произведению этих чисел.

10

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

- Найдите НОК чисел 34 и 57.
- Произведение двух чисел равно НОК этих чисел. Найдите сумму данных чисел, если их НОК равно 30. Рассмотрите все варианты.

11

ПРИМЕР

Длина окружности переднего колеса трёхколёсного велосипеда и длины окружностей двух задних колёс равны 60 см и 45 см соответственно. Ботир едет на велосипеде по прямой. Переднее колесо касается земли в точке P , а заднее колесо – в точке Q .



- Какое расстояние должно быть пройдено после начала движения, чтобы точки P и Q снова коснулись земли одновременно?
- Сколько оборотов сделают переднее колесо и задние колёса за это расстояние?

АНАЛИЗ

Точка P коснётся земли в следующий раз, когда переднее колесо сделает один полный оборот, т. е. когда велосипед пройдёт 60 см. А точка Q коснётся земли в следующий раз, когда заднее колесо сделает один полный оборот, т. е. когда велосипед пройдёт 45 см.

Следовательно, точки P и Q одновременно коснутся земли, когда колёса пройдут расстояние, равное НОК длин окружностей этих колёс,

т.е. 45 и 60.

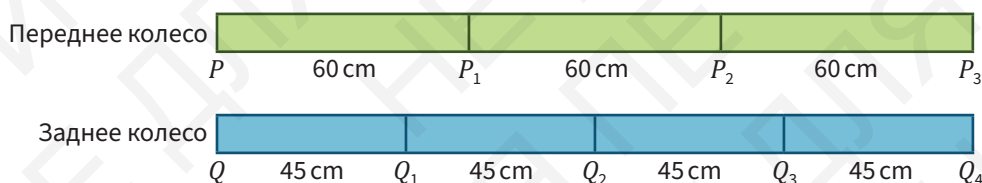
РЕШЕНИЕ

а) $60 = 2^2 \times 3 \times 5$
 $45 = 3^2 \times 5$
 $\therefore \text{НОК} = 2^2 \times 3^2 \times 5$
 $= 180$

Пройденное расстояние равно 180 см.

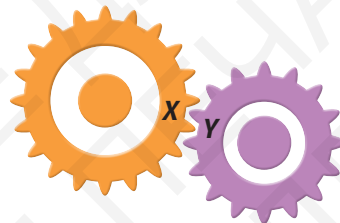
б) $180 \div 60 = 3$
 Переднее колесо сделало 3 оборота.
 $180 \div 45 = 4$
 Задние колёса сделали 4 оборота.

Расстояние, пройденное колёсами в горизонтальном положении, можно изобразить следующим образом.

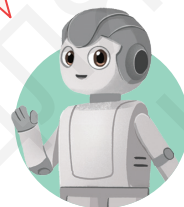
**11****ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ**

Число зубьев большого и маленького колеса равно 20 и 16 штук соответственно. До начала вращения зуб X на большом колесе совмещён с зубом Y на меньшем колесе.

- а) Сколько раз после начала вращения зубья двух колёс соприкоснутся друг с другом, прежде чем зубья X и Y вернутся в исходное положение?
- б) Найдите число оборотов каждого колеса до соприкосновения зубьев X и Y .

**ЧЕРТЕЖИ**

Для решения задачи удобно начертить прямоугольник и квадрат.

**12****ПРИМЕР**

Измерения прямоугольной плитки равны 40 см и 35 см. Жасур взял несколько таких плиток, чтобы построить квадрат. Найдите площадь наименьшего квадрата.

АНАЛИЗ

Чтобы изобразить квадрат, используйте чертёж. Розовая сторона квадрата кратна 40. Синяя сторона квадрата кратна 35. Так как стороны квадрата имеют равную длину, то эта длина должна быть общим кратным чисел 35 и 40.

Вычисление площади наименьшего квадрата – это то же, что и вычисление площади квадрата с наименьшей стороной.

Таким образом, мы должны вычислить наименьшее общее кратное чисел 40 и 35.

РЕШЕНИЕ

$$40 = 2^3 \times 5$$

$$35 = 5 \times 7$$

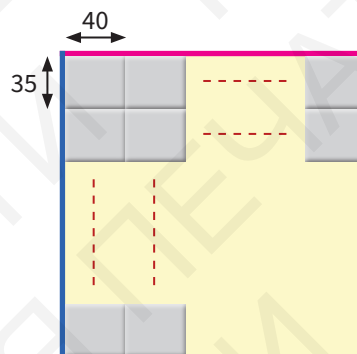
Длина наименьшей стороны = НОК (40; 35)

$$= 2^3 \times 5 \times 7$$

$$= 280$$

Площадь наименьшего квадрата = 280×280

$$= 78\,400 \text{ cm}^2$$

**ПОДУМАЙТЕ**

Сможет ли Жасур построить ещё один квадрат из **примера 12**, если использовать вдвое больше плиток?

12**ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ**

Измерения прямоугольного стола равны 63 см и 36 см. Взяли несколько таких столов, чтобы получить большой стол квадратной формы.

- Найдите наименьшее значение стороны квадратного стола.
- Сколько всего потребуется столов для получения большого квадратного стола?

1.3**ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ****НАЧАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ**

- Найдите НОК чисел.
 - 12 и 15
 - 6 и 28
 - 23 и 32
 - 60 и 75
 - 59 и 118
 - 65 и 91
- Найдите НОК чисел.
 - 9, 12 и 30
 - 13, 14 и 15
 - 28, 42 и 105
 - 22, 132 и 253

СРЕДНИЙ УРОВЕНЬ

- Даны два числа в виде произведения степеней: $2^4 \times 3^5 \times 5^3 \times 7^2$ и $2^3 \times 3^6 \times 5 \times 7^8$.
 - Найдите НОД этих чисел.
 - Найдите НОК этих чисел, выразив ответ в виде произведения степеней.
- У Дурдоны урок музыки проходит один раз в 6 дней, урок плавания – один раз в 4 дня, а урок балета – один раз в 8 дней. 1 апреля все три урока совпали. На какой день апреля снова придется все три урока одновременно?
- На новогодней ёлке красная гирлянда мигает один раз в 10 секунд, а синяя – один раз в 15 секунд. В данный момент обе гирлянды мигнули одновременно. Через сколько секунд они снова мигнут одновременно?

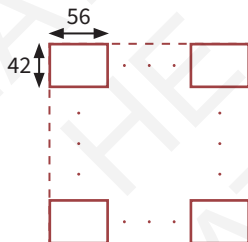
- 6 Запустили два дрона, летающих по кругу. Полный оборот дроны совершают за 48 и 56 секунд соответственно. Их запустили из одной точки, но на разной высоте, в одно и то же время и в одном направлении.

- a) Сколько потребуется времени, чтобы дроны оказались в исходной точке?
b) Сколько кругов сделает каждый дрон?

- 7 Толщина учебника «Биология» равна 20 mm, а толщина учебника «Математика» равна 28 mm. Учебники каждого вида сложены в отдельные стопки.

- a) Какой будет высота каждой стопки, если обе стопки станут одинаковыми по высоте?
b) Определите количество книг в каждой стопке.

- 8 Прямоугольные столы в классе имеют измерения 56 см и 42 см. Для выполнения задания объединили несколько столов так, чтобы получился стол квадратной формы.



- a) Найдите наименьшее значение длины квадратного стола.
b) Определите число рядов, чтобы получить большой квадратный стол.
- 9 Автобусы A , B и C приезжают на остановку каждые 20, 30 и 45 минут соответственно. Они одновременно встретились на остановке в 08:30. Когда автобусы встретятся в следующий раз?

ВЫСОКИЙ УРОВЕНЬ

- 10 Найдите две пары чисел, НОК которых равно 24.
- 11 Найдите две пары чисел, если НОД и НОК этих чисел равны 21 и 630 соответственно.
- 12 Найдите наибольшее трёхзначное число, которое одновременно делится на 15, 20 и 24.
- 13 Найдите наименьшее положительное число, которое нужно прибавить к числу 1628, чтобы полученная сумма делилась на 4, 5 и 16.
- 14 Даны натуральные числа m и n . Их НОД равен p , а НОК равно q . Какая связь между $m \times n$ и $p \times q$? Для решения этой задачи вспомните вычисление НОД и НОК двух чисел.
- 15 В корзине n яблок. Если это число яблок разделить на 3, то останется 2 штуки, а если разделить на 5, то останется 4 штуки. Каково наименьшее значение n ? Обоснуйте свой ответ.
- Совет:** Какая связь между 2 и 3? А между 4 и 5? Каково будет решение, если яблок $(n + 1)$?